Автоматика и телемеханика, № 10, 2024

© 2024 г. **И.Б. ЯДЫКИН, д-р техн. наук (Jad@ipu.ru),
И.А. ГАЛЯЕВ (ivan.galyaev@yandex.ru)
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)**

СТРУКТУРНЫЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Для билинейных многосвязных непрерывных стационарных устойчивых систем с простым спектром разработаны методы и алгоритмы получения аналитических формул спектральных разложений грамианов. Найдена гарантированная ограниченная область распространения методов решения и анализа линейных систем управления на класс билинейных систем. Разработаны новые достаточные условия BIBO устойчивости билинейных систем. Полученные спектральные разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычетам изображений воздействий позволяют оценить их влияние на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы.

Ключевые слова: спектральные разложения грамианов, преобразование Лапласа, обратное преобразование Лапласа, обобщенное уравнение Ляпунова, H_2-норма, грамиан управляемости.

DOI: 10.31857/S0005231024100025, **EDN:** YVOWDM

1. Введение

Поддержка бесперебойной, стабильной работы энергосистемы является одной из важнейших задач электроэнергетики. Потеря устойчивости энергосистемы приводит к провалу напряжения и отключению электричества у потребителей энергии. В качестве одного из подходов для описания процессов функционирования реальной энергосистемы является создание упрощенной физической модели, состоящей из большого числа колебательных систем, представляющих собой упруго связанные группы генераторов. Как правило, колебательные подсистемы имеют различные резонансные частоты. В случае возникновения резонанса определенных подсистем или отключения генераторов, неустойчивые колебательные подсистемы начинают взаимодействовать, что приводит к развитию неустойчивых процессов во всей энергосистеме.

Одним из эффективных методов анализа статической устойчивости энергосистем является метод грамианов. Анализ грамиана управляемости линейной модели энергосистемы дает информацию о распределении мощности по электрической сети, о влиянии отдельных групп генераторов и потребителей на пропускную способность того или иного участка сети [1]. Оценка предельных границ устойчивости основана на оценке энергии, накопленной в группе слабоустойчивых режимов. Из физических соображений становится ясно, что рост этой энергии означает приближение энергосистемы к границе устойчивости. Если известна передаточная функция ее линейной модели, то энергия колебаний может быть оценена по квадрату H_2-нормы передаточной функции, которая может быть вычислена путем решения уравнений Ляпунова и вычисления энергетических функционалов [2–4]. Блэкаут является примером тяжелой системной аварии в энергосистеме, степень угрозы которой можно вычислить с помощью метода грамианов. Однако он основан на использовании линеаризованной модели и не позволяет анализировать устойчивость при коротких замыканиях на линиях, что требует учета факторов нелинейностей модели.

Выбор билинейной модели энергосистемы позволяет учесть нелинейности взаимодействий. Для такой модели вычисление H_2-нормы оператора основано на разложении резольвенты матрицы динамики линейной системы на простые дроби в комплексной области. Также существуют итерационные алгоритмы вычисления квадрата H_2-нормы грамианов управляемости. Билинейные модели энергосистем используются для анализа статической устойчивости энергосистем [1, 5]. Для решения задачи анализа устойчивости [6, 7] используется многомерное преобразование Лапласа. Первые попытки альтернативного решения посредством метода грамианов для нелинейных моделей динамических систем были связаны с научным направлением понижения размерности, а также вычислением кинетической и накопленной энергий. В [8] был впервые разработан итеративный метод для вычисления квадрата H_2-нормы для оператора билинейной системы. В работах [9–12] для синтеза нелинейных систем управления использовались функциональные ряды Вольтерра и многомерные передаточные функции. Метод грамианов используется для вычисления спектральных разложений грамианов управляемости, наблюдаемости и кросс-грамианов по матрицам решений уравнений Ляпунова и Сильвестра для непрерывных и дискретных систем с простым и кратным спектрами. В работе [13] предложен метод грамианов для расчета виртуальных энергетических балансов, основанный на спектральном разложении квадрата H_2-нормы для передаточной функции системы. Определены энергетические показатели для аномалий энергетического баланса и получены их выражения в терминах квадратичных комплекснозначных форм. Сравнение абсолютных значений этих форм позволяет выявить аномалии баланса и, что не менее важно, указать на конкретные устройства, вызывающие аномалии. Для задач мониторинга устойчивости электроэнергетических систем эти аномалии определяют тяжесть угрозы неустойчивости и направление развития возможной каскадной аварии. Для задач технической диагностики они определяют возможные деградационные отказы технических устройств [14].

Основной вклад работы можно определить как новый метод спектрального разложения матричных рядов Вольтерра с целью вычисления функционалов грамиана и энергии билинейной системы вычисление H_2-нормы для билинейной системы, основанный на разложении резольвенты матрицы динамики линейной системы на простые дроби в комплексной области. Кроме того, разработаны итерационные алгоритмы вычисления квадрата H_2-нормы грамианов управляемости для непрерывной билинейной системы, основанные на использовании прямого и обратного преобразования Лапласа на каждом шаге итераций.

2. Постановка задачи

Рассматривается устойчивая непрерывная стационарная билинейная динамическая MIMO система [19]

$$\Sigma_2\colon \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + \sum\limits_{\gamma=1}^{m} N_\gamma x\left(t\right) u_\gamma\left(t\right) + Bu\left(t\right), \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $y(t) \in R^m$, $u_\gamma(t)$ – γ-я компонента $u(t)$.

Для системы (2.1) определена линейная часть

$$\Sigma_1\colon \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax\left(t\right) + Bu\left(t\right), \\ y\left(t\right) = Cx\left(t\right). \end{cases} \tag{2.2}$$

Посредством матричного ряда Вольтерра задается выражение для грамиана управляемости билинейной системы [1]

$$\begin{aligned} &P_1(t_1) = e^{At_1}B, \\ &P_i(t_1, \ldots, t_i) = e^{At_i}\left[N_1 P_{i-1} N_2 P_{i-1} \ldots N_m P_{i-1}\right], \quad i = 2, 3, \ldots, \\ &P = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \ldots \int\limits_0^{\infty} P_i(t_1, \ldots, t_i) P_i^{\mathrm{T}}(t_1, \ldots, t_i) dt_1 \ldots dt_i. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для системы (2.1) известно два представления обобщенного уравнения Ляпунова (ОУЛ) через грамиан управляемости и наблюдаемости соответственно

$$AP + PA^T + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma P N_\gamma^{\mathrm{T}} = -BB^{\mathrm{T}}, \tag{2.4}$$

$$A^{\mathrm{T}}Q + QA + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma Q N_\gamma^{\mathrm{T}} = -C^{\mathrm{T}}C. \tag{2.5}$$

Лемма 1 [1]. *Рассмотрим последовательность векторов* $\{x_i(t)\}$ *решений дифференциальных уравнений системы* (2.1), *в которой вектор управлений задан на пространстве непрерывных вещественных векторов* $U^m\,(I)$ *на конечном интервале* $I = (0, T)$ *с теми же начальными условиями, что и* *для линейной системы* (2.2)

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + Bu, \tag{2.6}$$

$$\dot{x}_i = Ax_i + \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma x_{i-1} u_\gamma + Bu, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

$$x_i\,(0) = x\,(0)\,, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда для каждого вектора $u\,(t) \in U^p\,(I)$ *последовательность векторов* $\{x_i(t)\}$ *решений систем* (2.6)–(2.7) *сходится равномерно на* I *к решению билинейной системы* (2.1) – $\{x(t)\}$.

Введем вектор невязки $z_i\,(t) = x\,(t) - \ x_i\,(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Тогда справедливы равенства

$$z_i\,(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{\gamma=1}^{m} N_\gamma z_{i-1}(\tau)\, u_\gamma\,(\tau)\, d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{2.8}$$

Положим нулевые начальные условия

$$x_i\,(0) = x\,(0) = 0, \quad z_i\,(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

В этом случае решение системы дифференциальных уравнений (2.6) примет вид

$$x_0\,(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu\,(\tau)\, d\tau. \tag{2.9}$$

Теорема 1 [24]. *Ряд Вольтерра* (2.3) *сходится на временном интервале* $[0, \inf)$ *для любого ограниченного входного сигнала, если выполняются следующие два условия:*

1. *Матрица* A *устойчива, т.е.* $\Lambda(A) \subset C^-$.

2. *Матрицы* N_γ *достаточно ограничены, т.е.* $\sum_{\gamma=1}^{m} ||N_\gamma|| < \frac{\mu}{cM}$, *где две константы* $\mu > 0$ *и* $c > 0$ *такие, что*

$$||e^{At}||_2 \leqslant ce^{-\mu t/2}, \quad t \geqslant 0.$$

В настоящей работе предлагается новый комплексный подход к построению решений $z_i\,(t)$ с целью разработать новые итеративные алгоритмы решений и конструктивные проверяемые критерии сходимости решений на полуинтервале $[0, \infty)$. Для решения поставленной задачи предлагается новая методология построения решения:

1. На первой итерации выполнять EVD декомпозицию матрицы динамики линейной части.

2. Вычислять решение для элементов вектора на каждом шаге во временной и частотной области с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа на основе декомпозиции по спектру и агрегирования элементов вектора.

3. Формировать функциональные последовательности элементов вектора состояния билинейной системы и строить интегральные неравенства для построения их мажорант.

4. Получить критерии сходимости элементов решений на полуинтервале $[0, \infty)$ и на их основе выполнить анализ BIBO устойчивости билинейной системы.

3. Основные результаты

В такой постановке примем, что матрица A устойчива и имеет простой спектр, $m = 1$, а функция $u(t)$ ограничена на полуинтервале $[0, \infty)$

$$\int_0^\infty |u(\tau)|\, d\tau \leqslant M > 0. \tag{3.1}$$

Если все собственные числа s_r матрицы A различны, то существует невырожденное преобразование координат

$$\begin{gathered} x = Tx_d, \quad z = Tz_d, \quad \dot{zx}_d = A_d zx_d + B_d u, \quad y_d = C_d x_d, \\ A_d = T^{-1}AT, \quad B_d = T^{-1}B, \quad C_d = C\mathrm{T}, \quad Q_d = T^{-1}BB^{\mathrm{T}}T^{-\mathrm{T}}, \end{gathered} \tag{3.2}$$

или

$$A_d = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_1^* \\ \nu_2^* \\ \vdots \\ \nu_n^* \end{bmatrix}; \quad TV = VT = I.$$

Где матрица T составлена из левых собственных векторов u_i, а матрица $T^{-1} = V$ – из правых собственных векторов ν_i^*, соответствующих собственному числу s_i.

Рассмотрим процесс последовательного построения решений $z_d(t)$.

Первый шаг. Во временной области решение определяется уравнением (2.9). Для элемента «φ» диагонализованной системы это уравнение имеет вид

$$z_{d\varphi}^{(1)}(t) = \int_0^t e^{s_\varphi(t-\tau)} b_\varphi u(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0,\infty),$$

откуда с учетом условия $s_\varphi \in \mathrm{C}^-$ следует неравенство

$$\left| z_{d\varphi}^{(1)}(t) \right| \leqslant \max_\varphi |b_\varphi|\, M, \quad \varphi = 1, 2, \dots, n, \quad t \in [0,\infty).$$

Поскольку из (3.1) вытекает существование изображения $u(s)$, в частотной области точное решение имеет вид

$$z_{d\varphi}^{(1)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} b_\varphi u(s).$$

Второй шаг. В соответствии с (2.8) решение во временной области имеет вид

$$z_{d\varphi}^{(2)}(t) = \int\limits_0^t e^{s_\varphi(t-\tau)} N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau, \quad \varphi = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [0, \infty). \tag{3.3}$$

Изображение интеграла свертки (3.3) имеет форму

$$z_{d\varphi}^{(2)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} \mathcal{L}\left[N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau)\, u(\tau)\right].$$

Поскольку все собственные числа s_φ находятся в левой полуплоскости, справедливы неравенства

$$\left|e^{s_\varphi(t-\tau)}\right| < 1, \quad \tau \in [0,\infty),$$

$$\left|z_{d\varphi}^{(2)}(t)\right| \leqslant \int\limits_0^t \left|N b_\varphi u^2(\tau)\right| d\tau, \quad \varphi = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [0, \infty). \tag{3.4}$$

При выполнении условия (3.1) функция $u(t)$ преобразуема по Лапласу. Предположим, что ее изображение $u(s)$ является рациональной алгебраической дробью, имеющей «l» простых полюсов

$$u(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{\prod_{k=1}^{l}(s - s_k)}.$$

Разложение этой функции на простые дроби с комплексными коэффициентами имеет форму

$$u(s) = \sum_{k=1}^{l} R_k^u (s - s_k)^{-1}, \quad R_k^u = \frac{A(s_k)}{\dot{B}(s_k)},$$

где R_k^u – вычет функции $u(s)$ в ее полюсе. На основании теоремы о перемножении двух функций во временной области имеем

$$\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau)\, u(\tau)\right] = \sum_{\varphi=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(s - s_k), \tag{3.5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau)\, u(\tau)\right]\right\} = \sum_{\varphi=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(t) e^{s_k t}. \tag{3.6}$$

Из (3.6) с учетом устойчивости линейной части билинейной системы следует неравенство

$$\left|\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(1)}(\tau)\, u(\tau)\right]\right\}\right| \leqslant \left|\sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| |u(t)|\,,\ \forall\varphi, i; \quad \forall t\in[0{,}\infty).$$

С учетом последнего неравенства можно записать неравенство (3.4) в виде

$$(3.7)\quad \left|z_{di}^{(2)}(t)\right| \leqslant \left|\sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| \int\limits_0^t |u(\tau)| d\tau,\ \ \forall\varphi, i=1,2,\ldots,n,\ \ t\in[0,\infty).$$

Третий шаг. В соответствии с общей формулой решение во временной области имеет вид

$$(3.8)\quad z_{d\varphi}^{(3)}(t) = \int\limits_0^t e^{s_\varphi(t-\tau)} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau,\ \ \forall\varphi, \varphi=1,2,\ldots,n,\ \ t\in[0,\infty)\,.$$

Изображение интеграла свертки (3.8) принимает форму

$$z_{d\varphi}^{(3)}(s) = (s-s_\varphi)^{-1}\mathcal{L}\left[N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right].$$

Поскольку все собственные числа s_φ находятся в левой полуплоскости, справедливы неравенства

$$\left|e^{s_\varphi(t-\tau)}\right| < 1,\ \ \forall t,\tau\in[0{,}\infty),$$

$$(3.9)\qquad \left|z_{d\varphi}^{(3\ )}(t)\right| \leqslant \int\limits_0^t \left|N b_\varphi u^2(\tau)\right| d\tau,\ \ \forall\varphi, \varphi=1,2,\ldots,n,\ \ t\in[0,\infty)\,.$$

На основании теоремы о перемножении двух функций во временной области имеем

$$(3.10)\qquad \mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right] = \sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(s-s_k),$$

$$(3.11)\qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right]\right\} = \sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u u(t) e^{s_k t}.$$

Из (3.11) с учетом устойчивости линейной части билинейной системы следует неравенство

$$\left|\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_i^{\mathrm{T}} N z_{d\varphi}^{(2)}(\tau)\, u(\tau)\right]\right\}\right| \leqslant \left|\sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u\right| |u(t)|\,,\ \forall\varphi, i; \quad \forall t\in[0{,}\infty).$$

С учетом последнего неравенства можно записать неравенство (3.9) в виде

$$\left|z_{d\rho}^{(3)}\left(t\right)\right| \leqslant \left|\sum_{\psi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{\psi\varphi}R_k^u\right| \left|\sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{\psi\varphi}b_\varphi R_k^u\right| M, \tag{3.12}$$
$$\forall\varphi, i = 1, 2, \ldots, n, \quad t \in [0, \infty)\,,$$

или

$$\left|z_{d\rho}^{(3)}\left(t\right)\right| \leqslant nl \max_{\psi,\varphi}\left|n_{\psi\varphi}\right| \max_{k}\left|R_k^u\right| \left|z_{d\rho}^{(2)}\left(t\right)\right|,\ t \in [0, \infty)\,.$$

Докажем, что на всех последующих шагах $j = 4, 5, \ldots$ справедливы рекуррентные неравенства

$$\left|z_{d\rho}^{(j)}\left(t\right)\right| \leqslant nl \max_{\psi,\varphi}\left|n_{\psi\varphi}\right| \max_{k}\left|R_k^u\right| \left|z_{d\rho}^{(j-1)}\left(t\right)\right|,\ t \in [0, \infty)\,. \tag{3.13}$$

Применим метод математической индукции. Неравенство справедливо при $j = 3$.

Предположим, что оно справедливо для шага $j - 1$

$$\left|z_{d\rho}^{(j-1)}\left(t\right)\right| \leqslant nl \max_{\psi,\varphi}\left|n_{\psi\varphi}\right| \max_{k}\left|R_k^u\right| \left|z_{d\rho}^{(j-2)}\left(t\right)\right|, \quad t \in [0, \infty)\,,$$

$$\left|z_{d\rho}^{(j-2)}\left(t\right)\right| \leqslant \left\{nl \max_{\psi,\varphi}\left|n_{\psi\varphi}\right| \max_{k}\left|R_k^u\right|\right\}^{j-3} \left|\sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi}b_\varphi R_k^u\right| M. \tag{3.14}$$

В соответствии с общим алгоритмом (2.5) имеем

$$z_{d\rho}^{(j)}\left(t\right) = \int\limits_0^t e^{s_\rho(t-\tau)} N z_{d\rho}^{(j-1)}\left(\tau\right) u\left(\tau\right) d\tau, \ \ \forall\varphi, \varphi = 1, 2, \ldots, n, \ \ t \in [0, \infty)\,. \tag{3.15}$$

В силу предположения об устойчивости линейной части справедливо неравенство

$$\left|z_{d\rho}^{(j)}\left(t\right)\right| \leqslant \left|\int\limits_0^t N z_d^{(j-1)}\left(\tau\right) u\left(\tau\right) d\tau\right|, \ \ \forall\varphi, \varphi = 1, 2, \ldots, n, \ \ t \in [0, \infty)\,. \tag{3.16}$$

С другой стороны справедлива оценка

$$\left|\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left[e_\rho^{\mathrm{T}} N z_d^{(j-1)}\left(\tau\right) u\left(\tau\right)\right]\right\}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_{\varphi=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi}R_k^u z_d^{(j-1)} u\left(t\right)\right|, \ \forall\varphi, i; \ \ \forall t \in [0,\infty). \tag{3.17}$$

Подставим в неравенство (3.16) неравенства (3.13) и (3.14) и учтем неравенство (3.17). Таким образом мажоранта для функциональной последовательности $\left\{ z_{d\rho}^{(j)}\left(t\right)\right\}$, $j=2,3,\ldots,\infty$ имеет вид

$$\left| z_{d\rho}^{(j)}\left(t\right)\right| \leqslant \left\{ nl \max_{\psi,\varphi} \left| n_{\psi\varphi}\right| \max_{k} \left| R_k^u \right| \right\}^{j-1} \left| \sum_{\varphi=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_{\varphi} R_k^u \right| M,\ t \in [0,\infty)\,.$$

4. Критерий BIBO устойчивости билинейной системы

Построим для последовательности z_d^j мажоранту в виде геометрической прогрессии.

Первый член прогрессии

$$m_1 = \max_{\varphi} |b_{\varphi}| M.$$

Член прогрессии с номером "j"

$$m_j = \max_{\varphi} \left| b_{\varphi}\right| M q^{j-1},$$

где q – знаменатель прогрессии

$$q = nl \max_{\psi,\varphi} \left| n_{\psi\varphi}\right| \max_{k} \left| R_k^u \right|.$$

Достаточное условие сходимости прогрессии

$$nl \max_{\psi,\varphi} \left| n_{\psi\varphi}\right| \max_{k} \left| R_k^u \right| < 1. \tag{4.1}$$

Достаточное условие расходимости прогрессии

$$\exists n, l, \phi, \psi, k : nl \max_{\psi,\varphi} \left| n_{\psi\varphi}\right| \max_{k} \left| R_k^u \right| > 1. \tag{4.2}$$

Условие (4.1) гарантирует сходимость всех числовых последовательностей элементов матриц решения обобщенного уравнения Ляпунова на каждом шаге в процессе итераций. Это означает, что при выполнении условия ограниченности числа M и достаточного условия сходимости прогрессии ограниченный вход обеспечивает ограниченный выход, что означает BIBO устойчивость билинейной системы. Аналогичное условие (4.2) означает, что найдется хотя бы одна расходящаяся прогрессия на рассматриваемом конечном интервале, которая позволяет построить итеративный процесс вычисления неограниченного решения. Выполнение условия (4.2) приводит к BIBO неустойчивости билинейной системы. В соответствии с признаком Вейерштрасса последовательности частичных сумм m_j сходятся равномерно и абсолютно. Заметим, что полученные условия BIBO устойчивости билинейной системы в отличие от достаточного критерия позволяют анализировать зависимость условия

BIBO устойчивости билинейной системы не только от амплитуды входного воздействия, но и от его спектра. В частности, эти условия включают оценки модулей вычетов изображения функции входа в полюсах характеристического уравнения изображения.

Теорема 2. *Пусть дана непрерывная билинейная система* (2.1) *с многими входами и многими выходами, вещественными матрицами A, B, N и линейной частью* (2.2), *определенной на числовой оси $t \in [0, \infty)$, гурвицевой матрицей A с простым спектром. Функции $u_\gamma(t)$ ограничены на интервале $[0, \infty)$ и выполнены неравенства*

$$\int\limits_0^\infty |u_\gamma(\tau)|\, d\tau \leqslant M_\gamma > 0, \;\; \gamma = 1, 2, \ldots, m.$$

Также дана итеративная процедура построения решения системы (2.1) *вида* (2.6)–(2.7) *с нулевыми начальными условиями. И невырожденное преобразование координат системы с матрицей T* (3.2).

Тогда на каждом шаге итерации справедливы спектральные разложения ядер Вольтерра решения исходной и преобразованной систем во временной и частотной области вида

$$z_{d\varphi}^{(j)}(s) = (s - s_\varphi)^{-1} \mathcal{L}\left[N z_{d\varphi}^{(j-1)}(\tau)\, u(\tau)\right],$$

$$\left|z_{d\rho}^{(j)}(t)\right| \leqslant \left\{ nl \max_{\psi,\varphi} |n_{\psi\varphi}| \max_k |R_k^u| \right\}^{j-1} \left| \sum_{\varphi=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} n_{i\varphi} b_\varphi R_k^u \right| M, \quad t \in [0, \infty).$$

При выполнении условия (4.1) *функциональные ряды сходятся к решению абсолютно и равномерно.*

5. Заключение

В работе предложены новые алгоритмы и методология построения спектрального итеративного решения непрерывного билинейного уравнения, являющихся развитием подхода, предложенного в работе [24]. По сравнению с этими работами предложенный подход обладает следующими преимуществами:

1. Полученные критерии сходимости числовых последовательностей элементов решения билинейного уравнения во временной и частотной области определяют гарантированную ограниченную область распространения методов решения и анализа линейных систем управления на класс билинейных систем для многих приложений.

2. Получены новые достаточные условия BIBO устойчивости билинейных систем и предложен новый метод вычисления установившихся значений их решений.

3. Для построения и исследования решения вместо многомерного преобразования Лапласа предложено использовать частотные методы, основанные на прямом преобразовании Лапласа.

4. Полученные спектральные разложения решений по спектру матрицы динамики линейной части, а также спектру и вычетам изображений воздействий, позволяют оценить их влияние на устойчивость и динамические характеристики билинейной системы.

5. Для частного случая уравнений MIMO BTI непрерывных систем с воздействиями, изображения которых являются дробно-рациональными функциями, сходящимися на конечном интервале, получены аналитические формулы итеративного построения решений.

Следует отметить ограничения предложенного подхода:

1. Линейная часть билинейной системы должна быть устойчивой, а ее матрица динамики иметь простой спектр.

2. Исследование ограничено детерминированными воздействиями.

3. Полюса изображений воздействий должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al-Baiyat S., Farag A., Bettayeb M.* Transient approximation of a bilinear two-area interconnected power system // Electric Power Syst. Res. 1993. V. 26. No. 1. P. 11–19.
2. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM. Philadephia, 2005.
3. *Alessandro P., Isidori A., Ruberti A.* Realization and structure theory of bilinear dynamic systems // SIAM J. Cont. 1974. V. 12. P. 517–535.
4. *Arroyo J., Betancourt R., Messina A., Barocio E.* Development of bilinear power system representations for small signal stability analysis // Electric Power Syst. Res. 2007. V. 77. No. 10. P. 1239–1248.
5. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim. 2011. V. 49. P. 686–711.
6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник-М.: Изд-во Лань, 2009. 726 с.
7. *Feeny B., Liang Y.* Interpreting proper orthogonal modes of randomly excited vibration systems // J. Sound Vib. 2003. V. 265. No. 5. P. 953–966.
8. *Bruni C., Dipillo G., Kogh G.* On the mathematical models of bilinear systems // Ricerche di Automatica. 1971. V. 2. P. 11–26.
9. *Lubbok J., Bansal V.* Multidimensional Laplace transforms for solution of nonlinear equation // Proc. IEEE. 1969. V. 116. No. 12. P. 2075–2082.
10. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.

11. *Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д.* Техническая кибернетика. Теория автоматического управления / Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортогональных спектров. 1969. С. 223–256.

12. *Мироновский Л.А., Соловьева Т.Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // АиТ. 2013. № 4. С. 59–79.

13. *Zhang L., Lam J.* On H_2 model order reduction of bilinear systems // Automatica. 2002. V. 38. P. 205–216.

14. *Odgaard P., Stoustrup J., Kinnaert M.* Fault tolerant control ofwind turbines a benchmark model // IEEE Trans. Control Syst. Technol. 2013. V. 21. No. 4. P. 1168–1182.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Галяевым.

Поступила в редакцию 25.06.2024

После доработки 15.07.2024

Принята к публикации 25.07.2024